Johnston 1987

Alfred Förtsch

2. Dezember 2021

1 Was soll erklärt werden?

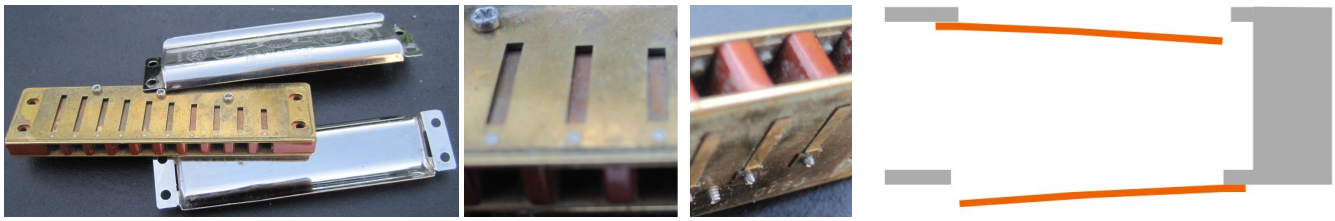

Abbildung 1: Von links nach rechts: Bluesharp mit Kanzellenkörper, Stimmplatten und Deckelplatten (abgeschraubt). Blaszungen. Ziehzungen. Schematische Schnittzeichnung durch einen Kanal mit Blaszunge (oben) und Ziehzunge (unten), wobei der Lösabstand (reed gap) jeweils übertrieben groß gezeichnet ist.

In jedem der zehn Kanäle einer Bluesharp (engl.: blues harmonica) befindet sich eine Blas- und eine Ziehzunge, mit der sich *normale Blas- und Ziehtön*e spielen lassen. Deren Frequenzen liegen knapp unterhalb der Resonanzfrequenzen der jeweiligen Zungen, wobei man letztere näherungsweise durch Anzupfen der Zungen bestimmen kann (siehe Anhang). Normale Töne lassen sich am einfachsten mit entspannter Mundstellung (Embouchure) spielen.

Mit entsprechenden Geometrien des Vokaltrakts, bei denen eine Verengung zwischen Zungenrücken und oberem Gaumen eine wesentliche Rolle spielt, lassen sich auf den Kanälen #1 bis #6 einer Bluesharp[1] die Ziehtöne kontinuierlich nach unten „benden“, wobei die Spielfrequenzen dieser *Bends* (bend notes, gebendete Töne) zwischen den Eigenfrequenzen der beiden Zungen im Kanal liegen. Von der Verarbeitung des Instruments und dem Können des Spielers[2] abhängig liegt der tiefste erzielbare Ziehbend einen knappen Halbton über dem normalen Blaston. Auf den Kanälen #7 bis #10 lassen sich die Blastöne nach unten benden.

Mit ähnlichen Geometrien des Vokaltrakts lassen sich *Overbends* erzeugen. Auf den Kanälen #1 bis #6 entstehen durch Blasen Overblows, auf den Kanälen #7 bis #10 erhält man durch Ziehen Overdraws. Overbends haben Spielfrequenzen, die über der Eigenfrequenz der höher gestimmten Zunge im Kanal liegen. Wechselt man beispielsweise auf Kanal #4 oder #6 von einem normalen Blaston zu einem Overblow, so hört man den Ton eine knappe kleine Terz nach oben springen. Durch weiteres Verändern des Vokaltrakts lassen sich Overbends kontinuierlich nach oben benden.

Grundsätzlich schwingen bei allen möglichen Tönen (normale Töne, Bends, Overbends) beide Zungen. Bei normalen Blas- bzw. Ziehtönen schwingt allerdings fast nur die Blas- oder Ziehzunge, bei Overblows bzw. Overdraws fast nur die Ziehzunge bzw. Blaszunge. Bendet man eine Ziehzunge kontinuierlich nach unten, schwingt zunächst fast nur die Ziehzunge, irgendwann schwingen beide Zungen mit gleicher Amplitude, beim tiefsten erreichbaren Ton schwingt fast nur noch die Blaszunge. Entsprechendes gilt für Blasbends.

Eine physikalische Erklärung der Tonerzeugung auf der Bluesharp sollte normale Töne, Bends und Overbend einerseits anschaulich erklären, andererseits sollten mögliche Spielfrequenzen und andere Eigenschaften des Instruments (leichte Spielbarkeit...) aus entsprechenden Vorgaben (Eigenschaften der Stimmzungen, Geometrie des Instruments, Saug- oder Blasdruck, Geometrie des Vokaltrakts...) vorhersagbar sein.

[1] Unter einer Bluesharp verstehen wir im Folgenden ein Instrument in der üblichen Richter-Stimmung.

[2] Derzeit gibt es meines Wissens noch keine allgemein anerkannte Regel für genderneutrale Formulierungen. Daher wird hier und im Weiteren die im Deutschen bislang übliche maskuline Form „der Spieler“ verwendet. Selbstverständlich ist damit keine Festlegung des Geschlechts des spielenden Menschen gemeint.

2 Überblick ohne Formeln

Robert B. Johnston ist wohl der erste, der die Tonerzeugung auf der Bluesharp und dabei insbesondere die für den Blues charakteristischen Bends und die damals aufkommenden Overbends zum Gegenstand physikalischer Untersuchungen macht [Jo 87]. Im theoretischen Teil seiner 1987 erschienenen Arbeit wendet er Modellvorstellungen und Formeln aus einem 1979 erschienenen Paper von Neville H. Fletcher an, in dem es insbesondere um die Tonerzeugung beim Saxophon geht [Fle 79]. Die Bluesharp hat ihren ersten Auftritt in der Physik also als „Mississippi Saxophone"!

Blasinstrumente wie das Saxophon funktionieren als selbsterregte Rückkopplungssysteme. Der vom Spieler erzeugte Luftstrom liefert zum einen Energie, zum anderen ermöglicht er die Wechselwirkung zwischen dem schwingenden Blatt und der schwingenden Luft im Instrumentenkörper. Das schwingende Blatt erzeugt durch wechselnde Verengungen des Luftwegs einen pulsierenden Luftstrom, welcher die Luft im Saxophonrohr zum Schwingen anregt. Diese schwingende Luft wiederum beeinflusst die Druckschwankungen am Übergang zwischen Mundstück und Rohr und daduch die Bewegung des Blattes. Durch Rückkopplung schaukeln sich die Bewegungen von Blatt und Luftsäule im Rohr auf, und durch die Öffnungen des Saxophonrohrs (Trichter, geöffnete Klappen) wird schließlich Schall abgestrahlt - das Instrument klingt.

Es ist nicht offensichtlich, wie der gerichtete Luftstrom aus der Lunge des Spielers akustische Schwingungen wechselnder Richtung erzeugen kann. Fletcher erklärt dies in Analogie zu Schwingungen selbsterregter elektronischer Oszillatoren, bei denen eine Gleichstromquelle Wechselströme erzeugt. Solche Oszillatoren lassen sich im Mikrowellenbereich realisieren, indem der Schwingkreis mit einer Gunn-Diode gekoppelt wird. Gunn-Dioden haben einen Kennlinienbereich mit negativer differentieller Admittanz. Wie eine formale Analyse zeigt, speist die Gunn-Diode infolgedessen Energie in den Stromkreis ein, falls zwischen ihren Enden Wechselspannung anliegt. Diese Energie kann eine selbsterregte Schwingung anstoßen und anschließend Energieverluste im Schwingkreis ersetzen [Got 97].

Zurück zum Saxophon: Für die Verengung zwischen schwingendem Blatt und Mundstück ist in linearer Näherung eine frequenzabhängige (akustische) Eingangsadmittanz definiert. Es zeigt sich, dass es dabei einen Bereich negativer differentieller Admittanz gibt, so dass Blatt und Mundstück eine Quelle akustischer Energie sein können. Auf dem Saxophon lassen sich nur Töne unterhalb der Resonanzfrequenz des Blattes erzeugen, weil nur dort die differentielle Admittanz (genauer: deren Realteil) negativ ist. Dabei klingt das Saxophon in der Nähe der Resonanzfrequenz der schwingenden Luftsäule im Rohr. Aus energetischer Sicht ist dies der Fall, weil dort die Energieverluste vergleichsweise minimal sind. Welche Spielfrequenz sich bei gegebenem Anblasdruck tatsächlich einstellt, lässt sich durch Vergleich der von Fletcher berechneten Eingangsadmittanz des Mundstücks mit der Eingangsadmittanz des Rohrs vorhersagen. Dabei kommen zusätzlich Phase bzw. Imaginärteil dieser Admittanzen ins Spiel.

Beim Saxophon beruht die Tonerzeugung auf selbsterregter Rückkopplung zwischen den Schwingungen des Blattes und der Luftsäule im Rohr. Johnston [Jo 87] überträgt dieses Modell auf die Bluesharp. Beide Zungen zusammen bilden das „aktive" Teilsystem („Generator"), die Luftsäule im Vokaltrakt des Spielers / der Spielerin das „passive" Teilsystem („Resonator") im Rückkopplungsprozess. Dabei wird stillschweigend davon ausgegangen, dass an der Tonerzeugung stets beide Zungen beteiligt sind und dass sie mit exakt gleicher Spielfrequenz schwingen.

Seit Helmholtz [He 1863] unterscheidet man zwischen schließenden und öffnenden Zungen. Instrumente mit schließenden Zungen (wie das Saxophon) haben selbsterregte Spielfrequenzen unterhalb der Resonanzfrequenz der Zunge, Instrumente mit öffnenden Zungen klingen oberhalb dieser Resonanzfrequenz. Fletcher [Fle 79] führt dies darauf zurück, dass im entsprechenden Frequenzbereich der Realteil der differentiellen Zungenadmittanz negativ ist. Bei der Bluesharp ist die Blaszunge beim Blasen eine schließende Zunge, die Ziehzunge ist eine öffnende Zunge. Beim Ziehen ist die Ziehzunge schließende Zunge, die Blaszunge öffnende Zunge. Wir betrachten jetzt einen der unteren Kanäle #1 bis #6, wo jeweils die Ziehzunge die höhere Resonanzfrequenz im Vergleich zur Blaszunge hat. Es erscheint plausibel, dass beim Ziehen mögliche Spielfrequenzen zwischen den Resonanzfrequenzen der beiden Zungen liegen (höher als die Resonanzfrequenz der öffnenden Blaszunge, niedriger als die Resonanzfrequenz der schließenden Ziehzunge), so wie es beim Bending der Fall ist. Johnston behandelt das System aus beiden Zungen als Parallelschaltung und berechnet deren Admittanz, indem er für die Einzelzungen die von Fletcher [Fle 79] angegebenen Admittanzformeln einsetzt. Tatsächlich ergibt sich für die Gesamtadmittanz ein negativer Realteil zwischen den Resonanzfrequenzen der beiden Zungen, siehe Abb. 2 (links). Für Blastöne läuft die oben angestellte Plausibilitätsbetrachtung ins

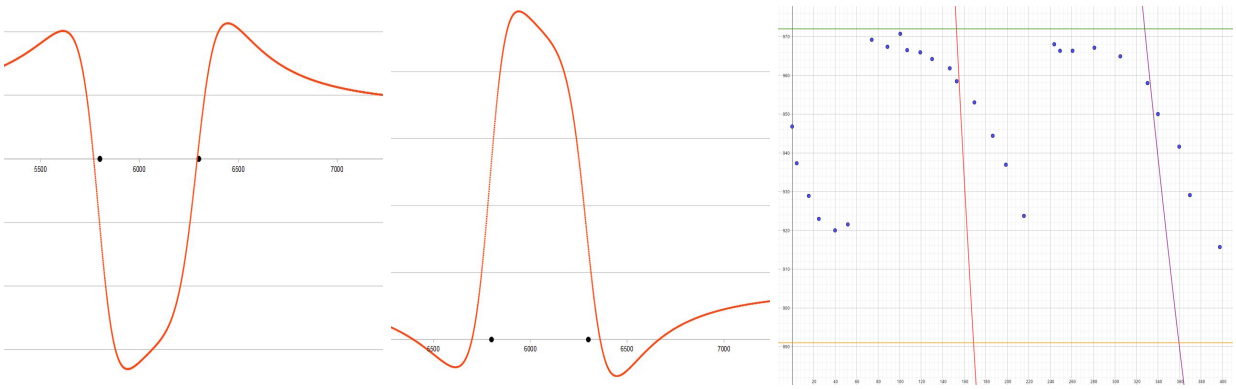

Abbildung 2: Links und Mitte: Realteile der Admittanzen von Zungenpaaren im Kanal einer Bluesharp (vgl. Abb. 3). Rechts: *Johnstons* Experiment: Spielfrequenzen einer an ein Rohr angeschlossene Bluesharp in Abhängigkeit von der Rohrlänge.

Leere: Mögliche Spielfrequenzen müssten unterhalb der Resonanzfrequenz der schließenden Blaszunge und oberhalb der Resonanzfrequenz der öffnenden Ziehzunge liegen, was unmöglich ist. JOHNSTONs Formel für die Admittanz der Parallelschaltung beider Zungen lässt beide Möglichkeiten zu ("oder" statt „und"), siehe Abb. 2 (Mitte).

Beim Saxophon liegt die Spielfrequenz in der Nähe der Resonanzfrequenz der schwingenden Luftsäule im Rohr. Kandidat für eine resonierende Luftsäule ist bei der Bluesharp die Luft im Mund- und Rachenraum des Spielers. Resonanzen des Vokaltrakts spielen eine entscheidende Rolle bei der Entstehung von Formanten und damit von Vokalen, beim Pfeifen, beim Spielen auf der Maultrommel oder beim Obertongesang. Bending und Overbends funktionieren mit vergleichbaren Konfigurationen des Vokaltrakts.

Allerdings zeigt der experimentelle Teil von JOHNSTONs Arbeit, dass kein einfacher Zusammenhang zwischen Resonanzfrequenz der Luftsäule im Vokaltrakt und der Spielfrequenz zu erwarten ist. JOHNSTON hat dabei eine Bluesharp an ein Rohr angeschlossen. Abb. 2 (rechts) zeigt, wie die Spielfrequenzen (senkrechte Achse) von der Rohrlänge (waagrechte Achse) abhängen. Die rote und die violette Gerade zeigen die Resonanzfrequenzen des Rohrs. Die Punkte zeigen die tatsächlich gemessenen Spielfrequenzen der Bluesharp. Dabei darf man sich nicht vom optischen Eindruck täuschen lassen, dass die Punkte um die Geraden herum angesiedelt sind. Tatsächlich liegen die meisten Spielfrequenzen deutlich über oder unter der Resonanzfrequenz des Rohres.

In Analogie zu FLETCHER nennt JOHNSTON als letztlich entscheidendes Auswahlkriterium für die Spielfrequenz, dass die Admittanz der Parallelschaltung beider Zungen zur Admittanz der resonierenden Luftsäule passen muss: Die Spielfrequenz soll sich ergeben durch Vergleich der *Phasen*.

Leider liegen für den Vokaltrakt eines Spielers oder einer Spielerin meines Wissens nach wie vor keine Daten vor, mit denen man JOHNSTONs Modell evaluieren könnte. Es muss also offenbleiben, ob man damit tatsächlich Spielfrequenzen vorhersagen und in diesem Sinn das Spiel auf der Bluesharp physikalisch erklären kann.

Der folgende Beitrag ist als Fortsetzung des Aufsatzes *Fletcher 1979* auf *www.bluesharpscience.de* gedacht. Jetzt soll der Theorieteil von JOHNSTON [Jo 87] leserfreundlich aufbereitet werden. Dabei diskutieren wir kurz, was dieses einfache Modell erklärt und was es (vermutlich) nicht erklären kann. Außerdem werden JOHNSTONs Formeln auf Kanal #4 einer C-Harp und damit auf einen für die Spielpraxis relevanten Frequenzbereich angewandt. Schließlich wird auf die Doppelrolle des Vokaltrakts als Resonator und als Quelle eines konstanten Über- bzw. Unterdrucks bei Blas- bzw. bei Ziehtönen eingegangen und Fletchers Modell konsequenter als von Johnston für die Bluesharp uminterpretiert. Das kuriosen Ergebnis wird sein, dass ein *positiver* Anblasdruck im Sinn von FLETCHER bei der Bluesharp *Ziehtöne* beschreibt, ein *negativer* Anblasdruck dagegen *Blastöne*.

3 Ein selbsterregtes Rückkopplungssystem

3.1 Elektrische Analogiemodelle und „Verständnis“

Saxophon und Bluesharp funktionieren als *selbsterregte Rückkopplungssysteme*. Dabei lässt sich eine Analogie zu *Wechselstromkreisen* herstellen, indem man akustische Druckschwankungen mit elektrischen Spannungsschwankungen und Luftströme (Volumenströme) mit elektrischen Strömen vergleicht. Unter der Annahmen, dass das System mit einer festen Frequenz ω schwingt, lassen sich Impedanz und Admittanz in *Analogie zur Elektrotechnik* definieren. Damit können bekannte Lösungsstrategien aus der Wechselstromphysik auf akustische Phänomene angewandt werden. Wer sich in der Elektrizitätslehre auskennt, wird dabei zudem das subjektive Gefühl haben, diese Phänomene besser zu *„verstehen“* [Ols 67, ZL 62].

3.2 Zwei Zungen als Parallelschaltung

Johnston nimmt an, dass auf beide Zungen im Kanal einer Bluesharp derselbe Druck wirkt und dass der Volumensstrom durch die Kanzelle gleich der Summe der Volumenströme durch die jeweiligen Öffnungen zwischen Zunge und Stimmplatte ist. Die Admittanz des aus beiden Zungen bestehenden Systems (des „Generators“) ist damit (für eine gegebene Frequenz ω) gleich der Summe der Einzeladmittanzen. Für die Einzeladmittanzen übernimmt er die von Fletcher [Fle 79] für schließende und öffnende Ventile (engl.: valves) hergeleiteten Formeln.

Mögliche Spielfrequenzen werden wie bei Fletcher durch einen negativen Realteil der Generatoradmittanz eingegrenzt. Welche Spielfrequenz tatsächlich auftritt soll sich durch einen Vergleich der Phasen der Admittanzen von Generator und Resonator ergeben, wobei von einem stetigen Übergang des Volumenstroms an der Grenze zwischen Generator und Resonator ausgegangen wird:

$$\tan \psi_G = \tan \psi_R \tag{1}$$

Im Gegensatz zu Fletcher in seiner Einleitung von [Fle 79] hat Johnston hier kein Minuszeichen, obwohl auf beiden Seiten Eingangsadmittanzen stehen[3].

3.3 Heutige Sichtweise

Fletchers Admittanzformeln sind relativ kompliziert, da er die instationäre Bernoulli-Gleichung verwendet. Die im Vergleich zur Verwendung der Bernoulli-Gleichung für stationäre Strömungen zusätzlich auftretenden Terme haben sich aber als irrelevant erwiesen. Wenn man sie weglässt, werden Fletchers Formeln einfacher und sind äquivalent zu den Formeln, die heutzutage im Rahmen der *linearen Stabilitätsanalyse* [Hir 01, Sil 09, ChK 08, ChK 16] verwendet werden[4]. Die vereinfachten Formeln wird man sinnvollerweise auch für Johnstons Ansatz verwenden, wodurch sein Modell einerseits entsprechend übersichtlicher wird und andererseits an Aktualität gewinnt.

Die lineare Stabilitätsanalyse betrachtet „harmonische“ Störungen mit *komplexe*r „Frequenz“ ω, welche die Stetigkeitsbedingungen $Re\,(Y_g + Y_r) = 0$ und $Im\,(Y_g + Y_r) = 0$ erfüllen, wobei Y_g und Y_r die Admittanzen von Generator und Resonator sind. Statt der Imaginärteile könnte man auch, wie Johnston, die Phasen der Admittanz einsetzen. Reelle Frequenzen ω, so wie sie in Fletchers Herleitung betrachtet werden, stellen dann den Übergang zwischen exponentiellem Verschwinden und (unbeschränktem) exponentiellem Anwachsen einer kleinen Störung dar. Für verschwindende Imaginärteile $Im\omega = 0$ werden die Stetigkeitsbedingungen für Real- und Imaginärteil nach dem Anblasdruck p_0 und der Frequenz ω aufgelöst. Es wird dann davon ausgegangen, dass ab einem kritischen Anblasdruck p_0 kleine Störungen (Auslenkungen aus dem statischen Gleichgewicht) zu harmonischen Schwingungen mit Frequenz ω führen können, die sich zu größeren Amplituden aufschaukeln könnten (beachte den Konjunktiv!):

> ... in the linearly unstable regime a linear analysis cannot tell us about the fate of perturbations at long times, once they have grown to have an amplitude that is not infinitesimal[5]. [Fie, 6.6 Criticisms of linear stability analysis]

[3] „... the player's vocal tract with admittance Y_v, at the lips looking into the mouth, and the sound generator is the pair of reeds ... with admittance Y_h,looking into the instrument.“ [Jo 87]

[4] Dies wird in meinem Aufsatz *Fletcher 79* auf www.bluesharscience.de „leserfreundlich“ vorgerechnet

[5] ... im Bereich linearer Instabilität kann die lineare Analysis keine Aussagen machen über das Langzeitverhalten von Störungen, sobald deren Amplitude infinitesimale Größenordnungen überschreitet.

Das *Anwachsen* der Schwingungsamplituden und die anschließende Existenz zeitlich stabiler harmonischer Schwingungen muss stattdessen von Anfang an durch *nichtlineares* Verhalten des Rückkopplungssystems erklärt werden, siehe etwa [ChK 08, ChK 16]. Dort wird auch auf die Idee von Energiezufuhr aufgrund negativer Energie eingegangen [ChK 08, Abschnitt 3.4.3][ChK 16, 9.3.4.3].

4 Johnstons Ergebnisse

4.1 Johnstons Beispiel

Johnston wendet seine Formeln *exemplarisch* auf ein Paar von Zungen an, deren Resonanzfrequenzen bei $\omega = 5800s^{-1}$($f = 923Hz$) und $\omega = 6300s^{-1}$ ($f = 1003Hz$) liegen[6]. Abb. 3 zeigt nacheinander Realteil und Phasenwinkel der Gesamtadmittanz für zwei Fälle: In der linken Hälfte gehört die höhere Eigenfrequenz zur schließenden Zunge, in der rechten Hälfte gehört sie zur öffnenden Zunge. Dabei kann die schließende Zunge die Ziehzunge oder die Blaszunge sein (entsprechend ist die öffnende Zunge dann Blas- bzw. Ziehzunge). Für *mögliche* Spielfrequenzen muss der Realteil jeweils *unterhalb* der horizontalen Achse liegen.

Die schwarzen „Knödel“ markieren die Eigenfrequenzen der beiden Zungen im Kanal. Die roten Kurven wurden mit Johnstons Formeln berechnet, bei den blauen Kurven wurden dagegen Fletchers vereinfachte Formeln verwendet (siehe Abschnitt 3.3).

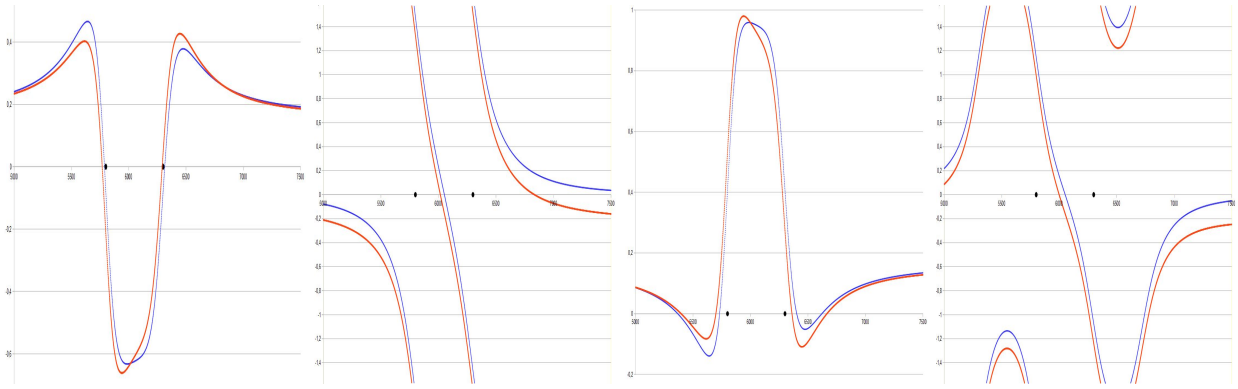

Abbildung 3: Realteile und Phasenwinkel der Zungenadmittanz, wie sie für Ziehbends (linke Hälfte der Abbildung) und Overblows (rechte Hälfte) typisch sind. Zu den (Kreis-) Frequenzen passt in etwa Kanal #6 einer Eb-Harp, wo Ziehbend und Overblow auch für ungeübtere Spieler möglich sind. Realteile in $10^8 \cdot m^3/Pa{\cdot}s$, (Kreis-) Frequenzen in s^{-1}. Die schwarzen Knödel markieren die Eigenfrequenzen der Zungen. Eingesetzte Werte siehe Tabelle in Abschnitt 6.2.

Für die unteren Kanäle #1 bis #6 steht die linke Hälfte von Abb. 3 für Ziehtöne. Der Realteil erlaubt Frequenzen zwischen den Eigenfrequenzen der Zungen. Dies passt dazu, dass man einen normalen Ziehton nach unten benden kann, wobei die Untergrenze knapp über dem normalen Blaston liegt.

Die rechte Hälfte der Abb. 3 sagt für die unteren Kanäle Blasbends unterhalb des normalen Blastons und Overblows oberhalb des normalen Ziehtons voraus. Tatsächlich sind nur Overblows möglich, die sich weiter nach oben benden lassen als es die Kurve für den Realteil vorhersagt.

Welche Töne tatsächlich klingen hängt vom Vokaltrakt ab. In Johnstons Modell müsste man dessen Admittanz und insbesondere deren Phasenwinkel kennen. Der Phasenwinkel für den Vokaltrakt müsste dann für die Spielfrequenz zum Phasenwinkel passen, der sich aus einer der Kurven in Abb. 3 ergibt.

4.2 Anmerkungen

Da meines Wissens nach wie vor keine derartigen Daten über den Vokaltrakt existieren, *ist eine Validierung von* Johnstons *Modell derzeit unmöglich.* Aber auch ohne eine solche experimentelle Prüfung stellen sich einige Fragen:

[6] Der Frequenzabstand entspricht eineinhalb Halbtönen und ist für die Bluesharp eher untypisch. Zur Veranschaulichung kann man an Kanal #6 einer Eb-Harp mit normalen Spielfrequenzen $932Hz$ und $1047Hz$ denken.

- *Normale Töne* werden mit entspannter Embouchure gespielt, wobei der Vokaltrakt vermutlich keine ausgeprägten Resonanzen aufweist[7]. Lassen sich normale Töne trotzdem durch ein Resonatormodell (ohne Resonanzen) beschreiben? Oder sollte man das Entstehen normaler Töne wie beim Akkordeon durch die Massenträgheit der anströmenden Luft erklären [RCM 05]? Wie würde man dann den kontinuierlichen Übergang normalen Tönen zu gebendeten Tönen erklären?

- Weshalb gibt es auf den unteren Kanälen Overblows, aber keine Blowbends? Weshalb „gewinnt" der Overblow?

- Man kann (wieder auf den unteren Kanälen) auf zwei bis drei benachbarten Kanälen synchron Ziehbends spielen. Es ist auch möglich, die Ziehtöne auf den Kanälen #1 und #4 (also eine Oktave) gleichzeitig zu benden. Wo liegen in diesen Fällen die Resonanzen des Vokaltrakts?

- Ist ein Resonatormodell überhaupt angemessen? Eine Erklärung aller möglichen Spielarten (normale Noten, Bends, Overbends) auf der Bluesharp ohne explizite Bezugnahme auf Resonanzphänomene im Vokaltrakt gibt Millot[8] [Mi 11].

5 Johnstons Modell für Kanal #4 einer C-Harp

5.1 Messwerte und Kurven

Wir wenden Johnstons vereinfachte (siehe Abschnitt 3.3) Formeln auf ein für die Spielpraxis relevanteres Beispiel an und betrachten Kanal #4 einer C-Harp mit einer D-Zunge als Ziehzunge und einer C-Zunge als Blaszunge[9]).

Im *Anhang* wird beschrieben, wie man aus den an einer Bluesharpzunge *gemessenen* Größen die *effektiven* Größen für die 1-Punkt-Oszillatorgleichungen berechnet.

Federhärte bzw. Relaxationszeit wurden exemplarisch für je eine der beiden Zungen (Blas- bzw. Ziehzunge) in Kanal #4 einer C-Harp gemessen. Diese Werte dürften im Rahmen der vorgenommenen Rundungen und der üblichen Fertigungstoleranzen auch für die jeweils andere Zunge gelten.

Eine Belastung von $4g$ am freien Ende der C-Zunge bewirkt eine Auslenkung um $1mm$, woraus sich mit $g = 9,8N/kg$ und (27) eine Federhärte von $42N/m$ ergibt. Die Resonanzfrequenzen der Zungen sind aufgrund der schwachen Dämpfung praktisch gleich den beim Anzupfen gemessenen (Pseudo-) Eigenfrequenzen: $f_0 = 589Hz$ (D-Zunge) und $f_0 = 525Hz$ (C-Zunge) mit den entsprechenden Kreisfrequenzen $\omega_0 = 3700s^{-1}$ und $\omega_0 = 3300s^{-1}$. Für die C-Zunge ergibt sich daraus mit (32) eine effektive Masse von $3,9mg$, für die D-Zunge erhält man $3,1mg$. Im Vergleich dazu beträgt die tatsächliche Masse des schwingenden Teils der C-Zunge $42mg$, was die Notwendigkeit der Verwendung effektiver Größen bei der Modellierung einer schwingenden Zunge durch einen abstrakten 1-Punkt-Oszillator verdeutlicht.

Für die Druckkraft beträgt die effektive Oberfläche S nur 2/5 der tatsächlichen Oberfläche, aus Länge $14mm$ und Breite $2mm$ resultiert damit $S = 1,1 \cdot 10^{-5}m^2$. Der Lösabstand ist $x_{gap} = \pm 2 \cdot 10^{-4}m$, die Dämpfungskonstante beträgt $\chi = 0,004$ (gemessen für die D-Zunge über die Relaxationszeit).

Realistische Anblasdrucke beim Bending liegen nach [Mi 99] bei $p_0 = 700Pa$ (wobei sich an den Kurven wenig ändert, wenn man stattdessen $500Pa$ oder $900Pa$ einsetzt).

Die blauen Kurven in Abb. 4 zeigen jeweils nebeneinander Realteil und Phasenverschiebung der Admittanz für Ziehtöne (linke Hälfte der Abbildung) und Blastöne (rechte Hälfte der Abbildung). Dabei wurden die gemessenen Werte in Johnstons (vereinfachte, siehe Abschnitt 3.3) Formeln eingesetzt. Die im Vergleich zu Johnstons Beispiel wesentlich kleinere (aber realistische) Dämpfungskonstante sorgt dafür, das diese (blauen) Kurven deutlich anders als Johnstons Kurven in Abb. 3 aussehen. Der scheinbare Widerspruch wird aufgelöst, wenn man die Dämpfungskonstante als Parameter variiert. Mit Johnstons Wert $\chi = 0,05$ ergeben sich in Abb. 4 die magenta gezeichneten Kurven, die zu Johnstons Kurven in Abb. 3 passen. Die türkis gezeichneten Kurven zu $\chi = 0,025$ veranschaulichen den Übergang von kleiner zu großer Dämpfungskonstante.

[7] Johnston schreibt zwar mit Blick auf die zweite Grafik von recht in Abb. 3: *„Thus, sound is possible only for fairly specific mouth geometries at two small frequency ranges ... The first is the frequency of the normal note..."* Dies widerspricht aber jeder Spielerfahrung und würde das Instrument wohl unverkäuflich machen.

[8] Laurent Millot berichtet über seine aktuelle Forschungen auf seiner Seite bei *ResearchGate.*

[9] Messwerte für eine *Hohner Special 20 Classic* in C-Dur

Abb. 4 mag auch eine Warnung sein, nicht zu viel aus exemplarischen Kurven herauslesen zu wollen (vgl. hierzu JOHNSTONs eigene Interpretation in [Jo 87], der eine untere Grenze für das Bending einen knappen Halbton über dem unteren normalen Ton im Kanal sowie einen scharf abgegrenzten Frequenzbereich für den Overblow begründen will, wobei er sein Modell für die Parallelschaltung zweier Zungen mit dem Modell für die Einzelzunge „rhetorisch kombiniert“). Würde man andererseits die blauen Kurven in Abb. 4 ernst nehmen und davon ausgehen, dass der Generator umso mehr Energie liefert, je negativer der Realteil seiner Admittanz ist, wären Ziehbends in der Nähe des normalen Blastons sogar besonders einfach zu spielen.

Was das einfache Modell liefert, ist nach wie vor dass man den oberen Ton im Kanal nach unten benden kann mit dem unteren Ton als Untergrenze. Außerdem ist ein Overblow möglich, den man kontinuierlich nach oben benden kann. Der in der Spielpraxis unmögliche Blasbend auf Kanal #4 wäre allerdings weiterhin möglich.

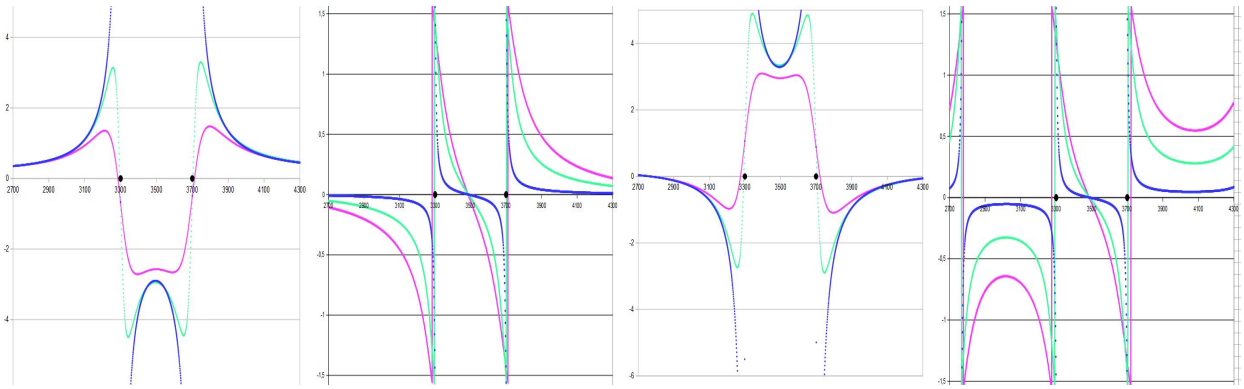

Abbildung 4: Realteil und Phasenwinkel der Admittanz: Übergang von großer (magenta) zu mittlerer (türkis) zu kleiner (blau) Dämpfungskonstante für Kanal #4 einer C-Harp mit angenommenen Werten $D = 0,05$, $D = 0,025$ und dem tatsächlich gemessenen Wert $D = 0,004$. Links: Ziehtöne. Rechts: Blastöne

5.2 Johnstons Phasenbedingung

5.2.1 Resonator mit zwei Moden

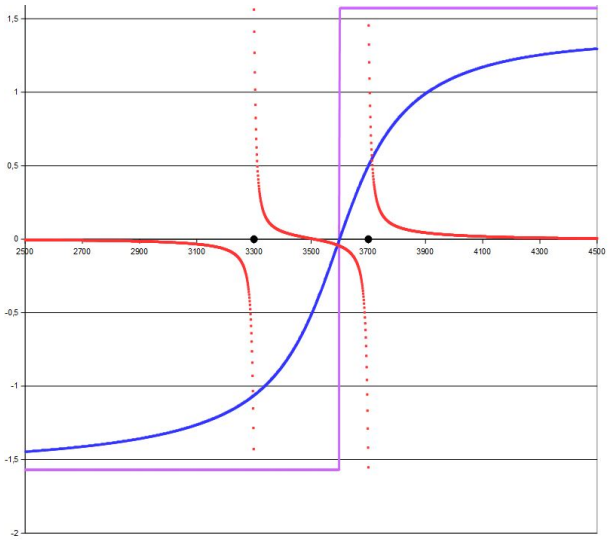

Abbildung 5: Phasenwinkel für die Admittanz einer Bluesharp (Ziehbends auf Kanal #4 einer C-Harp, rote Kurve), eines Oszillators mit einer Mode (violett) und eines Resonators mit zwei Moden(blau) als Funktion der Kreisfrequenz ω.

Die rote Kurve in Abb. 4 zeigt die mit JOHNSTONs Formeln berechneten Phasenwinkel $\Phi_{gen}(\omega)$ für der Admittanzen einer Bluesharp (Ziehbends auf Kanal #4 einer C-Harp), wobei Eigenfrequenzen (schwarze

„Knödel“ auf den Frequenzachsen) $\omega_o = 3300s^{-1}$ für die öffende Zunge und $\omega_c = 3700s^{-1}$ für die schließende Zunge verwendet wurden. Der Realteil der Admittanz ist (nur) negativ für Spielfrequenzen zwischen den beiden Zungenfrequenzen, also genau für den durch Bending zugänglichen Frequenzbereich (siehe Abb. 4).

Rohre haben genauso wie der Vokaltrakt mehr als eine Resonanzfrequenz. Ein Resonator lässt sich näherungsweise beschreiben durch eine Reihenentwicklung seiner Impedanz $Z(\omega)$ in Moden im Frequenzraum mit Resonanzfrequenzen ω_n, Qualitätsfaktoren Q_n und Modalfaktoren F_n [ChK 08, ChK 16]:

$$Z(\omega) = j\omega \sum_n \frac{F_n}{\omega_n^2 - \omega^2 + j\omega\omega_n/Q_n} \tag{2}$$

Der Phasenwinkel Φ_{res} der Eingangsadmittanz des Resonators ist minus der Phasenwinkel der Impedanz, also $\Phi_{res} = -\arctan \mathrm{Re}Z/\mathrm{Im}Z$. Gleichung (1) lässt sich graphisch lösen, indem man die zum Generator gehörige rote Kurve in Fig. 5 mit dem Graphen von $\arctan \mathrm{Re}Z/\mathrm{Im}Z$ schneidet.

Die violette Kurve beschreibt exemplarisch die Admittanz eines 1-Moden-Resonators und schneidet die rote Kurve bei der Resonanzfrequenz $\omega = 3600s^{-1}$. Dies steht im Widerspruch zu Johnstons experimentellen Ergebnissen, siehe Abb. 2 rechts).

Die blaue Kurve in Abb. 5 verwendet eine Entwicklung mit zwei Moden $\omega_1 = 3600s^{-1}$ und $\omega_2 = 8000s^{-1}$ mit gleichen Modalfaktoren $F_1 = F_2$ und gleichen Qualititätsfaktoren $Q_1 = Q_2 =: Q$ und zeigt, wie Johnstons Phasenbedingung im Prinzip funktionieren könnte. Innerhalb des erlaubten Intervalls wird die rote Kurve bei einer Spielfrequenz $\omega = 3590s^{-1}$ geschnitten, die tatsächlich verschieden von der Resonatorfrequenz $\omega_1 = 3600s^{-1}$ ist, aber nur $2Hz$ weniger. Die Schnitte der blauen und roten Kurve unterhalb und oberhalb der Zungenfrequenzen sind verboten, da dort der Realteil der Admittanz positiv wäre. Variieren der höher Modenfrequenz hat praktisch keinen Einfluss auf die Spielfrequenz, während die Wahl des Qualitätsfaktors entscheidend ist für den Abstand zwischen Spielfrequenz und unterer Modenfrequenz. Eingesetzt wurde $Q = 10$, für $Q = 100$ wäre die sich ergebende Spielfrequenz $\omega = 3598s^{-1}$ praktisch gleich der Resonanzfrequenz.

5.2.2 Rohr als Resonator

Im Anhang von [Jo 87] zitiert Johnston Fletchers Formel [Fle 79, Appendix] für den Phasenwinkel Φ der Eingangsadmittanz eines Rohrs als verlustbehafteter Resonator:

$$\Phi = -\arctan\left(\frac{H^2 - 1}{2H} \sin \frac{4\pi}{c} f \cdot L\right) \tag{3}$$

H ist eine Konstante mit Werten $10 \leq H \leq 100$ und beschreibt Verluste , f ist die Frequenz, L ist die Rohrlänge.

Johnston weist darauf hin, dass der Phasenwinkel um die Resonanz herum stetig von $\pi/2$ nach $-\pi/2$ wechselt. Für die Admittanz des von den Lippen aus gesehenen Vokaltrakts erwartet er ein ähnliches Verhalten des Phasenwinkels. Daher sollte es möglich sein, durch Justierung des Phasenwinkels alle erlaubten Töne zu spielen.

Wir demonstrieren diese Idee an Gleichung (3), obwohl ein realistisches Modell des Vokaltrakts wesentlich auf die palative Verengung bei Bends und Overbends eingehen müsste. Für $H = 50$ kann die Konstante $\left(H^2 - 1\right)/2H\big)$ in (3) durch $H/2$ genähert werden. Die Ergebnisse hängen nicht vom exakten Wert von H ab. Aufgrund der Periodizität der Sinusfunktion gibt es unendlich viele Möglichkeiten, Gleichung (3) für eine gegebene Rohrlänge l zu lösen. Eine sinnvolle Wahl ist:

$$l = \frac{c}{4\pi f}\left(\arcsin\left(-\frac{2}{H}\tan\Phi\right) + 2\pi\right) \tag{4}$$

Wie im vorangegangenen Abschnitt 5.2.1 sehen wir uns Kanal #4 einer C-Harp an. Die linke Kurve in Abb. 6 zeigt Rohrlängen, die Phasenwinkel erzeugen, wie sie in Abb. 5 (rote Kurve) dargestellt sind. Rechts sind die Differenzen zwischen Spielfrequenz und Resonanzfrequenz eines solchen Rohres in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz ω dargestellt für das Intervall zwischen den Eigenfrequenzen $\omega_o = 3300s^{-1}$ und $\omega_c = 3700s^{-1}$ der öffnenden und der schließenden Zunge. Der (hier nicht dargestellte) Realteil der Admittanz ist genau für dieses Intervall zwischen den Eigenfrequenzen negativ, beschreibt also die erlaubten Spielfrequenzen.

Gestattet sind Bendings mit Spielfrequenzen, die sich kontinuierlich von der Eigenfrequenz der Ziehzunge aus nach unten benden lassen, indem die Rohrlänge stetig von $29cm$ auf $32cm$ verlängert wird. Ein Blick auf die

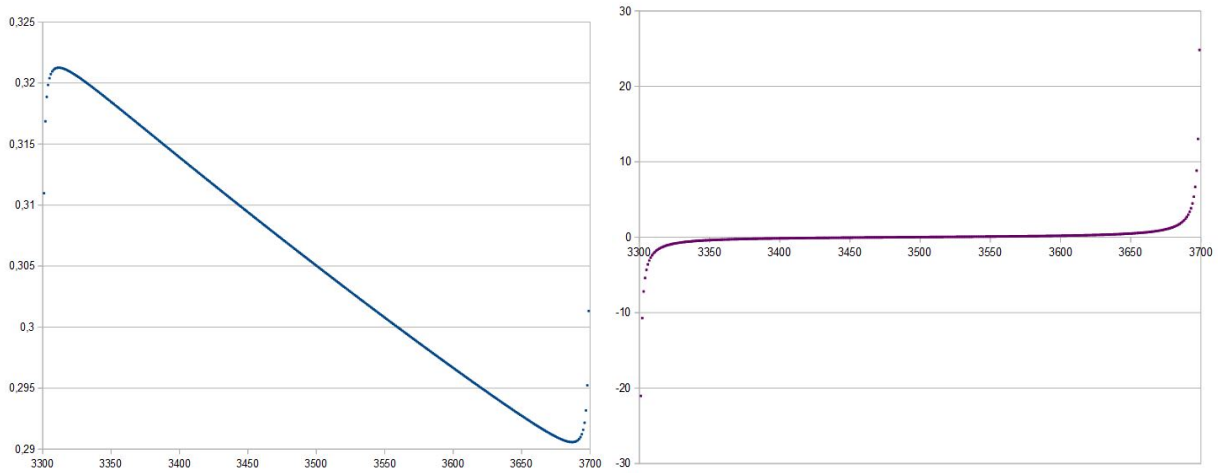

Abbildung 6: Links: Länge (in m) eines Rohres, dessen Admittanz einen Phasenwinkel hat, der zum Phasenwinkel in Abb. 5 rote Kurve im Intervall von $\omega_o = 3300s^{-1}$ bis $\omega_c = 3700s^{-1}$, den Eigenfrequenzen der Blas- bzw. Ziehzunge) passt, als Funktion der Kreisfrequenz ω. Rechts: Differenz zwischen Spielfrequenz und Resonatorfrequenz (in Hz) für die Rohrlängen aus Abb. 6 als Funktion der Kreisfrequenz ω.

rechte Kurve in Abb.6 zeigt allerdings, dass man den Unterschied zwischen Spielfrequenz und Resonatorfrequenz kaum wahrnehmen würde.

Insgesamt gesehen sagen solche rudimentären Modelle für den Resonator offenbar wenig aus über den Einfluss, den JOHNSTONs Phasenbedingung tatsächlich auf die Spielfrequenz hat. Die intuitivere Vorstellung, dass die Spielfrequenz im erlaubten Bereich einfach durch die Resonatorfrequenz festgelegt ist, führt auf vergleichbare Ergebnisse.

5.2.3 Realistische Phasenverschiebungen

$\Phi_Z(\omega)$ resp. $\Phi_Y(\omega)$ seien die Phasenwinkel der Impedanz Z resp. der Admittanz Y vom Spielermund aus gesehen. Gemessene (und damit realistische) Kurven für $\Phi_Z(\omega)$ zeigt [L 15, Fig. 2], wobei ausgebildete Saxophonisten mit Mundstellungen wie für die Vokale [a] und [i] gespielt haben. Erstrebenswert wären natürlich entsprechende Messungen von $\Phi_Y(\omega)$ für die Bluesharp, oder zumindest nummerische Berechnungen, beispielsweise auf der Basis von MRT-Aufnahmen wie in [ESBRH 13]. Meines Wissens existieren keine solche Daten und damit auch keine Validierung von Johnstons Resonatortheorie.

6 Die Formeln von Johnston

6.1 Fallunterscheidung

Im Folgenden wird es zunächst darum gehen, die Admittanz einer Einzelzunge im Kanal einer Bluesharp zu berechnen. Dabei kann der Spieler *blasen* oder *ziehen*, und die Zunge kann eine *öffnende* oder eine *schließende* Zunge sein. Die Zungen einer Bluesharp sind so an der Stimmplatte montiert, dass eine der Zungen ins Kanzelleninnere und die andere Zunge zum Außenraum hin zeigt (vgl. Abb. 1 rechts). Dabei steht das Zungenende im Lösabstand x_{gap} (engl.: gap = Lösabstand) von der Stimmplatte ab.

Beim Blasen operiert die Ziehzunge als *öffnende* Zunge, weil sie bei vorsichtig erhöhtem Blasdruck weiter nach außen absteht, und die Blaszunge operiert als schließende Zunge, weil sie dabei näher an die Stimmplatte gedrückt wird. Beim *Ziehen* ist die Blaszunge entsprechend die öffnende und die Ziehzunge die schließende Zunge. Für eine einzelne Zunge ergeben sich also vier Fälle: Blasen/Ziehen und öffnend/schließend.

6.2 Bezeichnungsweisen bei Fletcher

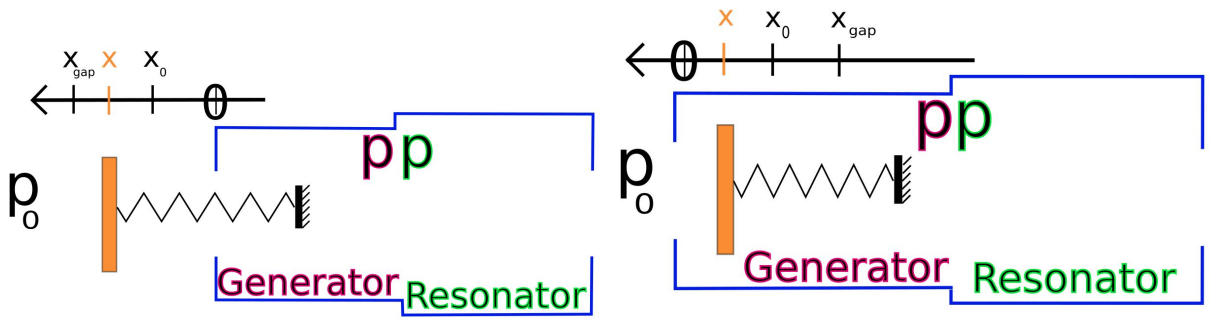

Abbildung 7: Bezeichnungsweisen bei *Fletcher*. Links: schließende, rechts: öffnende Zunge. Der Volumenstrom fließt von links nach rechts.

Fletcher verwendet bei der Herleitung seiner Formeln Konventionen und Bezeichnungsweisen, wie sie in Abb. 7 (inspiriert von Fig. 1 in [Fle 79]) dargestellt sind. Im Mundraum (links in der Abbildung) herrscht ein zeitlich konstanter Überdruck p_0 relativ zum atmosphärischen Umgebungsdruck, im Resonator werden nur akustische, sinusförmige Druckschwankungen p ohne konstanten Anteil vorausgesetzt. Der Volumenstrom fließt von links nach rechts (an der Grenze zwischen Generator und Resonator also aus dem Generator heraus, was bei der Formel für dessen Admittanz später durch ein Minuszeichen berücksichtigt wird).

Schließende (links) und öffnende (rechts) Zungen unterscheiden sich im Vorzeichen des Lösabstands x_{gap} und der mittleren Auslenkung x_0 (positiv für schließende und negativ für öffnende Zungen).

6.3 Johnston adaptiert Fletchers Formeln für Einzelzungen

Johnston erweitert Fletchers Admittanzformeln für *Ziehtöne*, indem er ein Vorzeichen für den konstanten Anblasdruck p_0 einführt: *positiv* für *Blastöne* und *negativ* für *Ziehtöne*. Die Zungenspitze hat eine positive Auslenkung x, wenn sie in das Innere des Instruments zeigt.

Die modifizierten Formeln für Einzelzungen gibt Johnston ohne Beweis an.

6.4 Die Doppelrolle des Vokaltrakts

Im Gegensatz zu Abb. 7 spielt der Vokaltrakt in einem Generator-Resonator-Modell für die Bluesharp eine Doppelrolle: Er sorgt für einen konstanten Über- oder Unterdruck, der überlagert wird von akustischen Schwingungen (siehe auch Abschnitt 8).

6.5 Von Johnston verwendete Bezeichnungen und Werte

Folgende Tabelle zeigt die in [Jo 87, Fig. 6, 7, 8 und 9] verwendeten *Werte* sowie eine Synopsis der in [Fle 79], [Jo 87] und in diesem Aufsatz verwendeten *Bezeichnungsweisen*.

Ende der 70er Jahre hatten Messungen an Holzblasinstrumenten darauf hingedeutet, dass für den Luftstrom zwischen Blatt und Mundstück ein allgemeinerer Ansatz als die Bernoulligleichung nötig sein könnte. Dies hatte Fletcher mit Koeffizienten α und β berücksichtigt. Spätere Messungen bestätigten aber hinreichend genau die Gültigkeit der Bernoulligleichung mit $\alpha = 1$ und $\beta = 0,5$. Wir verwenden in diesem Aufsatz daher grundsätzlich $\frac{\alpha}{\beta} = 2$.

Fletcher [Fle 79]	Johnston [Jo 87]	dieser Aufsatz	Werte in [Jo 87]
ψ	Φ	Ψ	siehe (13)
p_0	P_0	p_0	$10^3 Pa$ (drawbend) bzw. $2 \cdot 10^3$ (overdraw)
U_0	U_0	U_0	siehe (6)
ω	W	ω	
ω_r	W_r	ω_r	$5800 s^{-1}$ bzw. $6300 s^{-1}$
a	a	a	$1mm = 1 \cdot 10^3 m$
b	b	b	$2mm = 2 \cdot 10^3 m$
ξ_0'	X_u	x_{gap}	$\pm 0,2mm = \pm 2 \cdot 10^{-4} m$
ξ_0	X_0	x_0	siehe (5
m_r	M_r	m	$10mg = 1 \cdot 10^{-5} kg$
s_r	S_r	S	$0,2cm^2 = 2 \cdot 10^{-5} m^2$
α, β	y, z	1, $\frac{1}{2}$	siehe Bemerkung oben
$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{y}{z}$	2	siehe Bemerkung oben
χ_r	D_r	D	$0,05$
ϱ	R	ϱ	$1,2 \frac{kg}{m^3}$ (Luft)

6.6 Bezeichnungsweisen

Wir orientieren uns im Folgenden an [Jo 87] (S. 74 rechts)

- x entspricht dem Abstand der Zungenspitze von der Stimmplatte, die positive x-Achse zeigt in die Kanzelle hinein. Beim Saxophon verschließt das Blatt für $x = 0$ das Mundstück, entsprechend ist unsere an [Fle 79, Fig. 1] orientierten Abbildung 7 gezeichnet. Die Vorzeichenregel für x_{gap} und x_0 für öffnende und schließende Bluesharpzungen impliziert, dass nur kleine Schwingungsamplituden betrachtet werden, bei denen die Zunge nicht durch die Öffnung in der Stimmplatte schwingt.
- x_{gap} ist der Lösabstand (also der Abstand der Zungenspitze zur Stimmplatte für $p_0 = p = 0$) und damit die Ruhelage des äquivalenten Oszillators.
- x_0 ist der Abstand der Zungenspitze zur Stimmplatte für konstanten Druck p_0 (kein oszillierender Druckanteil, also $p = 0$).
- p_0 ist der konstante Blas- bzw. Saugdruck, der von der Lunge des Spielers erzeugt wird. Für Blastöne gilt $p_0 > 0$, für Ziehtöne $p_0 < 0$.
- $p = p_1 cos\omega t$ ist der oszillierende Druck an der Grenze zwischen Generator und Oszillator. Dabei ist $\omega = 2\pi f$ die zur Spielfrequenz f gehörige Kreisfrequenz, die im Weiteren einfach auch als Frequenz bezeichnet wird.
- $x - x_{gap}$ ist die momentane Auslenkung des äquivalenten Oszillators.
- Der Volumenstrom U und dessen von p_0 und x_0 verursachter konstanter Anteil U_0 zählen unabhängig von ihrer Richtung stets positiv.
- Für die Zunge bedeuten S ihre Oberfläche, b die Breite, m die Masse, D die Dämpfungskonstante.
- ϱ ist die Dichte der Luft.

6.7 Johnstons Formeln für einzelne Zungen

Wir stellen die von Johnston im Anhang von [Jo 87] angegebenen Formeln in unserer Notation (siehe 6.5) zusammen und stellen den Zusammenhang zu den bei Fletcher [Fle 79] angegebenen Formeln her, wobei auch einige Druckfehler ausgebessert wurden (siehe [Fle 82, Errata im Anhang] und [Jo 87, Formel (A4)]).

6.7.1 Hilfsgrößen

In den Formeln (13) und (14) für die Admittanz einer einzelnen Zunge erscheinen die im Folgenden angegebenen Hilfsgrößen x_0 (statische Auslenkung), U_0 (statischer Volumenstrom) sowie A und B.

$$x_0 = x_{gap} - \frac{S}{m\omega_r^2} \cdot p_0 \tag{5}$$

$$U_0 = |x_0| \cdot b \cdot \sqrt{\frac{2\,|p_0|}{\varrho}} \tag{6}$$

In seinen Formeln für die Admittanz des Generators verwendet FLETCHER [Fle 79] folgende Abkürzungen A und B :

$$A = \frac{2mp_0}{x_0 K_1^2 S} D\omega_r\omega \tag{7}$$

$$B = \frac{2mp_0}{x_0 K_1^2 S} \left(\omega_r^2 - \omega^2\right) \tag{8}$$

Die Größe K_1 ist in [Fle 79, Gleichung (18)] wie folgt definiert:

$$\frac{m}{S} \cdot \sqrt{\left(\omega_r^2 - \omega^2\right)^2 + \left(D\omega_r\omega\right)^2} \equiv K_1 \tag{9}$$

Damit formt JOHNSTON die Ausdrücke für A und B um:

$$A = \frac{S \cdot \frac{2p_0}{x_0} \cdot \omega\omega_r \cdot D}{m \cdot \left(\left(\omega_r^2 - \omega^2\right)^2 + \left(D\omega_r\omega\right)^2\right)} \tag{10}$$

$$B = \frac{S \cdot \frac{2p_0}{x_0} \cdot \left(\omega_r^2 - \omega^2\right)}{m \cdot \left(\left(\omega_r^2 - \omega^2\right)^2 + \left(D\omega_r\omega\right)^2\right)} \tag{11}$$

6.7.2 Konvention für Betrag und Phase

Sieht man vom Resonator in Richtung Generator, so erhält man als komplexe Admittanz $\hat{Y}_r$ des Generators (r wie reed):

$$\hat{Y}_r = -\frac{\hat{U}}{\hat{p}} \tag{12}$$

Dabei sind $\hat{U}$ und $\hat{p}$ die sinusförmigen Anteile mit Frequenz ω von Volumenstrom und Druck in komplexer Schreibweise. Für $\hat{Y}_r$ wählt *Fletcher* nicht die übliche Schreibweise $\left|\hat{Y}_r\right| \cdot e^{i(\omega t+\psi)}$ mit $\left|\hat{Y}_r\right| \geq 0$. Stattdessen deckt er die gesamte komplexe Ebene ab, indem der Phasenwinkel ψ auf $-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$ eingeschränkt wird, der Faktor vor der Exponentialfunktion aber negativ sein darf. Für diesen möglicherweise negativen Faktor schreibt er $[Y_r]$ und nennt ihn „magnitude“ („Größe“). JOHNSTON übernimmt diese Festlegung, schreibt aber Y_r statt $[Y_r]$ und spricht von „admittance“.

6.7.3 Admittanz der Einzelzunge

Mit x_0, U_0, A und B aus 6.7.1 lauten JOHNSTONs Formeln für Phasenwinkel und Größe (magnitude):

$$\tan\Psi = \frac{\frac{2|p_0|}{U_0} A + \omega\frac{\varrho a}{|x_0|b}\,(B-1)}{\frac{2|p_0|}{U_0}\,(1-B) + \omega\frac{\varrho a}{|x_0|b} A} \tag{13}$$

$$[Y_r] = \frac{1-B}{\frac{2|p_0|}{U_0} cos\psi - \frac{\varrho a}{|x_0|b}\omega sin\psi} \tag{14}$$

Die vereinfachten Formeln (siehe Abschnitt 3.3) erhält man daraus, indem man $\varrho = 0$ setzt. Für die Tangensformel ergibt sich damit $\tan\Psi = \frac{A}{1-B}$, also eine deutlich einfachere Formel. Im Vergleich dazu gilt für die Phasenverschiebung beim harmonischen Oszillator $\tan\Psi = \frac{A}{B}$, wie man durch Einsetzen von A und B und anschließendem Kürzen bestätigen kann.

Was schließlich gebraucht wird sind Real- und Imaginärteil der komplexen Admittanz, welche in Analogie zu den üblichen Formeln berechnet werden:

$$Re\hat{Y}_r = [Y_r] \cdot cos\psi \tag{15}$$

$$Im\hat{Y}_r = [Y_r] \cdot sin\psi \tag{16}$$

Wir überzeugen uns am Beispiel des 4. Quadranten, dass man mit Fletchers Konventionen tatsächlich Real- und Imaginärteil erhält: Dort gilt $-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq 0$ und $[Y_r] < 0$. Also hat man $cos\psi > 0$ und $sin\Psi < 0$, so dass sich insgesamt ein negativer Realteil und ein positiver Imaginärteil ergeben.

6.8 Zwei Zungen in Parallelschaltung

In Analogie zur Wechselstromphysik betrachtet JOHNSTON die beiden Zungen im selben Kanal als eine *Parallelschaltung*, für die sich die Admittanzen der beiden Zungen einfach *addieren*. Voraussetzung hierfür ist, dass auf beide Zungen dieselbe Druckdifferenz einwirkt, dass also insbesondere im Kanzelleninneren der Druck auf beide Zungen gleich ist. Implizit wird dabei angenommen, dass es eine räumlich definierte Grenze gibt, an der sich das System in Generator und Resonator zerlegen lässt und an der die jeweiligen Eingangsimpedanzen messbar wären, wobei der Volumenstrom an dieser Grenze die Summe der Volumenströme vorbei an den zwei Zungen wäre. Außerdem wird bei der Modellierung der zwei Zungen als Gesamtsystem vorausgesetzt, dass grundsätzlich beide Zungen am Rückkopplungsprozess beteiligt sind.

Damit addieren sich die gemäß (15) und (16) für die beiden Zungen 1 und 2 berechneten Real- und Imaginärteile der beiden Admittanzen Y_{r1} und Y_{r2} zu Real- und Imaginärteil der Gesamtadmittanz $\hat{Y}_r$:

$$Re\hat{Y}_r = Re\hat{Y}_{r1} + Re\hat{Y}_{r2} \tag{17}$$

$$Im\hat{Y}_r = Im\hat{Y}_{r1} + Im\hat{Y}_{r2} \tag{18}$$

Für die Phasenverschiebung ψ der Parallelschaltung gilt entsprechend:

$$\tan\psi = \frac{Re\hat{Y}_{r1} + Re\hat{Y}_{r2}}{Im\hat{Y}_{r1} + Im\hat{Y}_{r2}} \tag{19}$$

Für die graphische Darstellung von JOHNSTONs Formeln berechnet man der Reihe nach für beide Zungen x_{0i}, U_{0i}, A_i und B_i, $tan\Psi_i$ und damit Ψ_i, $[Y_{ri}]$ und schließlich Realteil und Imagiärteil der beiden Zungenadmittanzen. Addition der Realteile liefert den Realteil der Gesamtadmittanz, zusammen mit der Summe der Imaginärteile erhält man die Phasenverschiebung Ψ. Die Abbildungen in diesem Aufsatz wurden mit der *OpenOffice Calc* erstellt.

6.9 Wann klingt das Instrument?

In Analogie zu FLETCHER wird verlangt, dass der Realteil der Generatoradmittanz negativ ist, was für die notwendige Energiezufuhr vom Spieler an das selbsterregende, gedämpfte Rückkopplungssystem steht:

$$ReY_r < 0$$

Der stetige Übergang von Druck und Volumenstrom an der Grenze zwischen Generator und Resonator wird mit Hilfe der Phasenwinkel der Admittanzen (bei FLETCHER sind es die Imaginärteile) ausgedrückt, wobei es bei JOHNSTON kein Minuszeichen in der Formel gibt (vgl. Abschnitt 3.2):

$$\tan\Psi_r = \tan\Psi_p$$

7 Blasen und Ziehen

7.1 Synchroner Vorzeichentausch

Bei JOHNSTON zeigt die positive Achse für die Zungenauslenkung stets ins Innere des Instruments, Blaszungen sind innen montiert mit Lösabstand nach innen, Ziehzungen sitzen außen und sind nach außen geöffnet. Wenn man also beim Anblasdruck p_0 und beim Lösabstand x_{gap} simultan die Vorzeichen vertauscht, wird im Modell aus einer schließenden (öffnenden) Blaszunge eine schließende (öffnende) Ziehzunge. Wenn dabei die Beträge von Anblasdruck und Lösabstand gleich gewählt werden, sind die Formeln für A, B , $tan\psi$ und $Re\hat{Y}$ identisch. Die Kurven in Abb. 3 lassen sich dann wahlweise so lesen, dass ein Ziehton auf den unteren Kanälen bzw. ein Blaston auf den oberen Kanälen gebendet werden kann und dass Overblows auf den unteren bzw. Overdraws auf den oberen Kanälen möglich sind.

7.2 Herleitung für Blas- und Ziehtöne

7.2.1 Vorzeichen des Anblasdrucks

FLETCHERs Herleitung gilt für schließende und öffnende Zungen, das unterschiedliche Verhalten ergibt sich aus dem Vorzeichen des Lösabstands x_{gap}. Stillschweigend vorausgesetzt sind dabei positive Anblasdrucke $p_0 > 0$. JOHNSTON lässt auch negative „Anblasdrucke“ $p_0 < 0$ zu, was in seinen Formeln an einigen Stellen zu Betragsstrichen führt. Am Ende des Anhangs von [Jo 87] wird deutlich, dass JOHNSTON positive Drucke p_0 den Blastönen und negative Drucke p_0 den Ziehtönen zuordnet. Die x-Achse zeigt bei JOHNSTON für beide Zungen ins Kanzelleninnere. Dabei stellt er fest:

When P_0/X_0 is positive, the reed is a closing reed and, when P_0/X_0 is negative, it is opening...

Für unsere weiteren Überlegungen kann man aus dieser Bemerkung schließen, dass JOHNSTON bei der Adaption von FLETCHERs Modell dessen in Abb. 7 eingezeichnete Achsenrichtung (von rechts nach links) sowohl für Blas- als auch für Ziehzungen übernimmt.

7.2.2 Blastöne

Für positive Anblasdrucke $p_0 > 0$ werden FLETCHERs Formeln unverändert übernommen. Sie gelten für schließende ($x_{gap} > 0$) und für öffnende ($x_{gap} < 0$) Zungen.

7.2.3 Ziehtöne

Für Ziehtöne $p_0 < 0$ gelten nahezu wörtlich die gleichen Formeln, es ist nur der negative „Anblasdruck“ p_0 in (13) und (14) durch seinen Betrag $|p_0|$zu ersetzen.

Wir überprüfen dies im Folgenden, indem wir angeben, an welchen Stellen für *negative* Drucke $p_0 < 0$ in Fletchers Herleitung [Fle 79] Änderungen anzubringen sind. Dabei beziehen wir uns auf die Formeln aus dem Aufsatz *Fletcher 1979* auf *www.bluesharpscience.de* (wobei dort durchgehend ξ statt x verwendet wird).

An den Formeln im Zusammenhang mit der harmonischen Oszillatorgleichung, den Reihenentwicklungen und den Anwendungen der Additionstheoreme ändert sich nichts. Allerdings müssen in der Beroulli-Gleichung Betragsstriche stehen, daher:

$$|p_0 - p| = D^{-2}\xi^{-2}U^2 + \frac{\varrho a}{|\xi|\, b}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)$$

Für kleine Druckschwankungen p gilt $p_0 - p < 0$ und folglich:

$$p - p_0 = D^{-2}\xi^{-2}U^2 + \frac{\varrho a}{|\xi|\, b}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right) \tag{20}$$

Für den statischen Druckanteil gilt:

$$D^{-2}\xi^{-2}U_0^2 = |p_0| = -p_0 \tag{21}$$

An entscheidender Stelle in FLETCHERs Herleitung steht für $p_0 > 0$ folgende Gleichung:

$$p_0 - p_1 cos\omega t = p_0 \left(1 - 2\left(1 + \frac{\xi_1}{\xi_0}\left(cos\omega t \cdot cos\varphi - sin\omega t \cdot sin\varphi\right)\right)\right) \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{U_1}{U_0}\left(cos\omega t \cdot cos\psi - sin\omega t \cdot sin\psi\right)\right) -$$

$$- \frac{\varrho a}{|\xi_0|\, b}\left(U_1 \omega \left(sin\omega t \cdot cos\psi + cos\omega t \cdot sin\psi\right)\right) \tag{22}$$

Für $p_0 < 0$ wird daraus wegen (20) und (21):

$$p_1 cos\omega t - p_0 = -p_0 \left(1 - 2\left(1 + \frac{\xi_1}{\xi_0}\left(cos\omega t \cdot cos\varphi - sin\omega t \cdot sin\varphi\right)\right)\right) \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{U_1}{U_0}\left(cos\omega t \cdot cos\psi - sin\omega t \cdot sin\psi\right)\right) -$$

$$- \frac{\varrho a}{|\xi_0|\, b}\left(U_1 \omega \left(sin\omega t \cdot cos\psi + cos\omega t \cdot sin\psi\right)\right)$$

Multiplikation dieser Formel mit (-1)führt zu

$$p_0 - p_1 cos\omega t = p_0 \left(1 - 2\left(1 + \frac{\xi_1}{\xi_0}\left(cos\omega t \cdot cos\varphi - sin\omega t \cdot sin\varphi\right)\right)\right) \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{U_1}{U_0}\left(cos\omega t \cdot cos\psi - sin\omega t \cdot sin\psi\right)\right) +$$

$$+ \frac{\varrho a}{|\xi_0|\, b}\left(U_1 \omega \left(sin\omega t \cdot cos\psi + cos\omega t \cdot sin\psi\right)\right) \tag{23}$$

Diese Gleichung ist bis auf das Pluszeichen beim hintersten Term formal identisch mit FLETCHERs Gleichung (22). Ausgehend von einem Koeffizientenvergleich in $cos\omega t$ und $sin\omega t$ erhält FLETCHER nach einigen Umformungen Formeln für $\tan\Psi$ und für $[Y_r]$. Im Vergleich zu den Formeln für $p_0 > 0$ wird der einzige Unterscheid sein, dass die hintersten Terme (also Terme, in denen die Dichte ϱ vorkommt) das umgekehrte Vorzeichen haben. Für $p_0 > 0$ gilt:

$$\tan\Psi = \frac{\frac{2p_0}{U_0} A - \omega \frac{\varrho a}{|\xi_0| b}\left(B - 1\right)}{\frac{2p_0}{U_0}\left(1 - B\right) - \omega \frac{\varrho a}{|\xi_0| b} A}$$

Also gilt für $p_0 < 0$ wegen $p_0 = -\left|p_0\right|$:

$$\tan\Psi = \frac{\frac{2p_0}{U_0} A + \omega \frac{\varrho a}{|\xi_0| b}\left(B - 1\right)}{\frac{2p_0}{U_0}\left(1 - B\right) + \omega \frac{\varrho a}{|\xi_0| b} A} = \frac{\frac{2|p_0|}{U_0} A - \omega \frac{\varrho a}{|\xi_0| b}\left(B - 1\right)}{\frac{2|p_0|}{U_0}\left(1 - B\right) - \omega \frac{\varrho a}{|\xi_0| b} A}$$

Der Betrag der Admittanz ist für $p_0 > 0$ gleich:

$$[Y_r] = -\frac{U_1}{p_1} = \frac{1 - B}{\frac{2p_0}{U_0} cos\psi - \frac{\varrho a}{|\xi_0| b}\omega sin\psi} \tag{24}$$

Was ändert sich an (24) für Ziehtöne, also für $p_0 < 0$? Die Beträge der Amplituden U_1 und p_1 sind von Natur aus positiv. Der Volumenstrom zählt nach wie vor positiv, wenn er in den Resonator hinein, also in Abb. 7) von links nach rechts gerichtet ist. Da aber für Ziehtöne die Luft von rechts nach links fließt (in Abb. 7 herrscht links Unterdruck), muss in (24) ein zusätzliches Minuszeichen stehen. Daher gilt schließlich wegen $p_0 = -\left|p_0\right|$ für $p_0 < 0$:

$$[Y_r] = -\frac{1 - B}{\frac{2p_0}{U_0} cos\psi + \frac{\varrho a}{|\xi_0| b}\omega sin\psi} = \frac{1 - B}{\frac{2|p_0|}{U_0} cos\psi - \frac{\varrho a}{|\xi_0| b}\omega sin\psi}$$

7.2.4 Ergebnis

Also gelten JOHNSTONs Formeln (13) und (14) gleichermaßen für Blas- und Ziehzungen.

8 Eine realistischere Interpretation

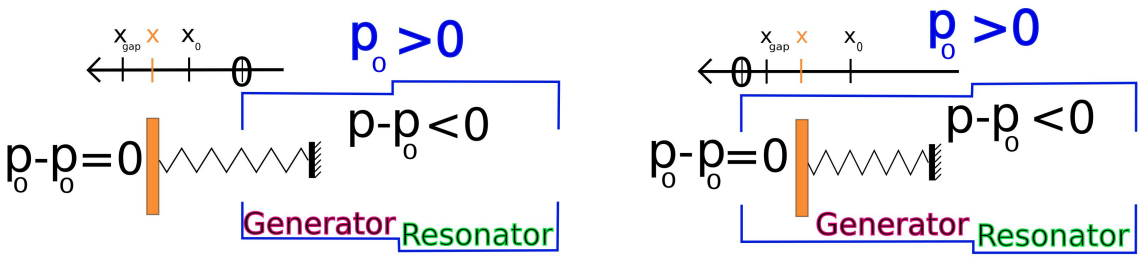

Abbildung 8: Ziehton auf einer Bluesharp nach Verschieben der p-Achse um p_0: Während in Abb. 7 die Auslenkung x erzeugt wird durch die Differenz aus dem akustischen Druck p im Resonator und dem konstanten Druck p_0, wird dieselbe Auslenkung x hier erzeugt von der Differenz aus $p - p_0 < 0$ im Resonator (Mundraum) und aus $p_0 - p_0 = 0$ im Außenraum. Links: schließende Zunge (Ziehzunge), rechts: öffnende Zunge (Blaszunge).

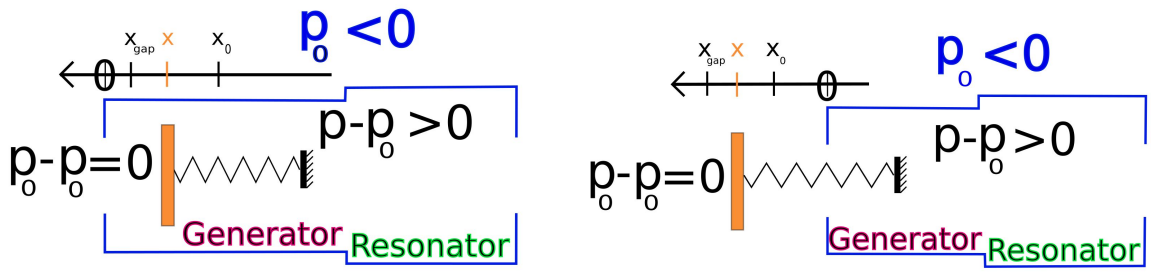

Abbildung 9: Blaston auf einer Bluesharp nach Verschieben der p-Achse um p_0. Links: schließende Zunge (Blaszunge), rechts: öffnende Zunge (Ziehzunge).

Wie wir gesehen haben, geht JOHNSTON bei seinen Formeln für die Bluesharp von einer Anordnung wie in Abb. (7) aus, bei dem der Mund in seiner Doppelrolle als Resonator und als Reservoir für einen konstanten Druck p_0 gleichsam zweigeteilt ist: links vom Instrument das Druckreservoir, rechts vom Instrument der Resonator.

In Wirklichkeit existieren im Vokaltrakt des Spielers fluktuierende Druckschwankungen relativ zum atmosphärischen Umgebungsdruck, und natürlich ist der Mund nicht zweigeteilt. Mit dem atmosphärischen Umgebungsdruck als Referenzdruck *überlagern* sich im Vokaltrakt ein konstanter Druck p_0 (positiv für Blastöne, negativ für Ziehtöne) mit akustischen Druckschwankungen p. Dieser Ansatz soll jetzt konsequent auf Fletchers Modell angewandt werden.

FLETCHERS in Abb. 7 dargestelltes Modell lässt sich durch eine Verschiebung der p-Achse auf die Bluesharp übertragen, indem man den Atmosphärendruck im Außenraum gleich Null setzt: $p_{harp} = p_{sax} - p_0$. Damit ergeben sich die in Abb. (8) und (9) dargestellten Fälle. Während in Abb. 7 die Auslenkung x erzeugt wird durch die Differenz aus dem akustischen Druck p im Resonator und dem konstanten Druck p_0, wird dieselbe Auslenkung x jetzt erzeugt von der Differenz aus $p - p_0$ im Resonator und $p_0 - p_0 = 0$ als Referenzdruck. Wir betrachten zunächst Abb. (8), die für den von FLETCHER behandelten Fall $p_0 > 0$ gilt. Ohne akustische Schwankungen (also $p = 0$) herrscht im Resonator ein (von der Koordinatentransformation kommender) Unterdruck $-p_0$. Aus $p < p_0$ folgt, dass auch $p - p_0$ für kleine akustische Druckschwankungen p negativ ist. Für die Bluesharp interpretiert ist der Resonator der Mundraum, und wenn dort ein Unterdruck herrscht, wird ein Ziehton beschrieben. Dafür zeigen die linke Grafik in Abb. (8) eine schließende Ziehzunge und die rechte Grafik eine öffnende Blaszunge. FLETCHERS Modell für das Anblasen einer Saxophonzunge beschreibt folglich eine Ziehton auf der Bluesharp.

Fazit: $p_0 > 0$ beschreibt auf der Bluesharp Ziehtöne. Die Grafiken in Abb. (9) zeigen entsprechend, das Blastöne auf der Bluesharp durch $p_0 < 0$ modelliert werden.

Was folgt aus diesen Überlegungen? An den Formeln ändert sich nichts, es wird nur eine andere Sichtweise nahegelegt: Blastöne sind Ziehtöne, und Ziehtöne sind Blastöne. Da die graphischen Darstellungen für Realteil und Phasenwinkel für Blas- und Ziehtöne identisch waren, bleiben sie unverändert, ebenso wie alle daraus gezogenen Folgerungen.

Anhang: Schwingende Zunge und äquivalenter 1-Punkt-Oszillator

Effektive Größen

Eine unter äußerer Druckeinwirkung schwingende Zunge ist physikalisch gesehen ein räumliches Vielteilchenproblem. Die einfachste Schwingungsmode lässt sich durch die Bewegungsgleichung eines 1-Punkt-Oszillators beschreiben:

$$\ddot{x} + 2r\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{S \cdot p}{m} \tag{25}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \tag{26}$$

Alle Größen in der äquivalenten Schwingungsgleichung (25) sind zunächst als effektive (formale) Größen zu verstehen, deren Zusammenhang mit der realen, experimentell zugänglichen Zungenschwingung im Folgenden hergestellt werden soll.

- x wird identifiziert mit der Auslenkung der Zungenspitze aus der Ruhelage.
- Es wird angenommenen, dass die Druckdifferenz zwischen beiden Seiten der Zungenoberfläche näherungsweise über die gesamte Zunge hinweg einen konstanten Wert p hat, so dass sich die effektive Kraft auf der rechten Seite von (25) mit Hilfe einer effektiven Oberfläche S als $S \cdot p$ berechnen lässt. Nach [Mi 99, Annexe A] ist S gleich $\frac{2}{5}$ der schwingenden Oberfläche der Zunge.
- ω_0 ist die effektive *Resonanzfrequenz*, die von der effektiven *Eigenfrequenz* unterschieden werden muss.
- r ist eine effektive Dämpfungskonstante, m die effektive Masse, k die effektive Federkonstante (Federhärte).

Leicht zu messen ist die Auslenkung x der Zungenspitze unter dem Einfluss einer dort punktuell angreifenden Kraft F_S. Daraus ergibt sich eine Federkonstante (Federhärte) $k_S = F_S/x$. Nach [Mi 99, Annexe A] ist die effektive Federkonstante in (26) dann gleich

$$k = \frac{16}{15} k_S \tag{27}$$

Durch Anzupfen der Zunge lassen sich Eigenfrequenz und Relaxationszeit der Zunge bestimmen. Diese experimentell zugänglichen Größen sollten sich unmittelbar auf den äquivalenten Oszillator übertragen lassen. Wenn die Beschreibung der realen schwingenden Zunge durch den fiktiven 1-Punkt-Oszillator sinnvoll ist, lassen sich daraus der Reihe nach die effekive Dämpfungskonstante r, die effektive Resonanzfrequenz ω_0 (die mit der ebenfalls messbaren realen Resonanzfrequenz übereinstimmen sollte) sowie eine effektive Masse m (die mit der tatsächlichen schwingenden Masse in keinem einfachen Zusammenhang steht) bestimmen:

Relaxationszeit und Dämpfung

Für einen gedämpften harmonischen 1-Punkt-Oszillator unterscheiden wir in Anlehnung an [ChK 08, ChK 16] zwischen *Resonanzfrequenz* $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ (mit Federkonstante k und Masse m) und *Eigenfrequenz* ω_E. Unter dem Einfluss einer periodischen äußeren Kraft schwingt der Oszillator bei seiner Resonanzfrequenz ω_0 mit maximaler Amplitude. Wird der Oszillator „angezupft“ ($x_0 > 0$ und $v_0 = 0$), entsteht eine abklingende Schwingung mit einer Pseudo-Frequenz, die gleich seiner Eigenfrequenz ω_E ist.

Während eine angezupfte Zunge ausschwingt, wirkt keine äußere Kraft. Für die Auslenkung x gilt dann:

$$\ddot{x} + 2r\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{28}$$

Die Konstante r beschreibt, wie stark die Schwingung gedämpft ist. Die Lösung dieser Gleichung ist

$$x = \frac{x_0}{\cos\varphi} \cdot e^{-r \cdot t} \cdot \cos\left(\omega_E t + \varphi\right)$$

mit Pseudo-Frequenz ω_E und Phasenverschiebung φ :

$$\omega_E = \sqrt{\omega_0^2 - r^2} \tag{29}$$

$$\cos\varphi = \sqrt{1 - \left(\frac{r}{\omega_0}\right)^2}$$

Nach Ablauf der *Relaxationszeit* τ ist die Schwingung auf das $1/e$-fache der anfänglichen Auslenkung x_0 abgeklungen. Die Konstante r aus Gleichung (28) und die Relaxationszeit τ sind folglich reziprok zueinander (was den Faktor 2 in der Oszillatorgleichung motiviert):

$$r = \frac{1}{\tau} \tag{30}$$

Die Konstante r wird als *Abklingkonstante (Dämpfungskonstante, Dämpfungskoeffizient)* bezeichnet

Eigenfrequenz und effektive Masse

Der Abklingkurve einer angezupften Zunge kann man Eigenfrequenz ω_E und Relaxationszeit τ entnehmen. Die Dämpfungskonstante ist dann $r = 1/\tau$. Zusammen mit ω_E und (29) ergibt sich die Resonanzfrequenz ω_0:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_E^2 + r^2} \tag{31}$$

Mit (27) erhält man daraus schließlich die effektive Masse des 1-Punkt-Oszillators:

$$m = \frac{k}{\omega_0^2} \tag{32}$$

Da Bluesharpzungen sehr schwach gedämpft sind (r ist viel kleiner als ω) besteht praktisch kein Unterschied zwischen der Resonanzfrequenz der Zunge und der beim Anzupfen gehörten bzw. gemessenen Frequenz.

Dämpfung und Gütefaktor

Gütefaktor Q (Qualitätsfaktor, quality factor), Relaxationszeit τ, Eigenkreisfrequenz ω_0 und Abklingkonstante (Dämpfungskonstante, Dämpfungskoeffizient) r bzw. *Dämpfungskonstante* χ_r ($D_r$in [Jo 87]) hängen wie folgt zusammen:

$$Q = \omega_0 \cdot \tau = \frac{\omega_0}{2r}$$

$$\chi_r = D_r = \frac{2r}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$$

Dabei kann „Dämpfungskonstante“ bei verschiedenen Autoren wahlweise r, $2r$ oder χ_r bedeuten. Außerdem wird $D = r/\omega_0$ auch als „Lehrsches Dämpfungsmaß“ bezeichnet (also $D_r = 2D$).

Literatur

[ChK 08] Chaigne, Antoine, and Jean Kergomard. Acoustique des instruments de musique. 2008.

[ChK 16] Chaigne, Antoine, and Jean Kergomard. Acoustics of musical instruments. Springer New York, 2016.

[CSW 11] Chen, Jer-Ming, John Smith, and Joe Wolfe. "Saxophonists tune vocal tract resonances in advanced performance techniques." The Journal of the Acoustical Society of America 129.1 (2011): 415-426.

[DC 06] Dieckman, Eric A., and James P. Cottingham. "Input impedance of Asian free reed mouth organs." The Journal of the Acoustical Society of America 120.5 (2006): 3076-3076.

[ESBRH 13] P. R. Egbert, L. K. Shin. D. Barrett, T. Rossing, A. B. Holbrook, Real-time magnetic resonance imaging of the upper airways during harmonica pitch bend. ICA 2013 Montreal

[Fie] Fielding, Suzanne, Lecture Notes: https://community.dur.ac.uk/suzanne.fielding/teaching/HST/sec6.pdf

[Fle 79] Fletcher, Neville H. "Excitation mechanisms in woodwind and brass instruments." Acta Acustica united with Acustica 43.1 (1979): 63-72..

[Fle 82] Fletcher, Neville H., R. K. Silk, and L. M. Douglas. "Acoustic admittance of air-driven reed generators." Acta Acustica united with Acustica 50.2 (1982): 155-159.

[Got 97] Gottlieb, Irving. Practical oscillator handbook. Elsevier, 1997.

[He 1863] Helmholtz, H. "On the sensation of tone (Ellis AJ, Trans.), Second English edn." (1863).

[Hir 01] Rienstra, Sjoerd W., and A. Hirschberg. "An introduction to acoustics." Report IWDE (2001): 92-06.

[Jo 87] Johnston, R. B. (1987). Pitch control in harmonica playing. Acoustics Australia, 15(3), 69-75.

[L 15] Li, W., et al. "Effect of vocal tract resonances on the sound spectrum of the saxophone." Acta Acustica united with Acustica 101.2 (2015): 270-278.

[Mi 99] Millot, Laurent. Etude des instabilites des valves: application a l'harmonica diatonique. Diss. Paris 6, 1999.

[Mi 11] Millot, Laurent. "Chromatical playing on diatonic harmonica: From physical modeling to sound synthesis." The Journal of the Acoustical Society of America 130.4 (2011): 2342-2342.

[Ols 67] Olson, Harry Ferdinand. Music, physics and engineering. Vol. 1769. Courier Corporation, 1967.

[RCM 05] Ricot, Denis, René Caussé, and Nicolas Misdariis. "Aerodynamic excitation and sound production of blown-closed free reeds without acoustic coupling: The example of the accordion reed." The Journal of the Acoustical Society of America 117.4 (2005): 2279-2290.

[Sil 09] Silva, Fabrice. Émergence des auto-oscillations dans un instrument de musique à anche simple. Diss. 2009.

[ZL 62] Zadeh, Lotfi A. "From circuit theory to system theory." Proceedings of the IRE 50.5 (1962): 856-865.

Inhaltsverzeichnis

1 Was soll erklärt werden? 1

2 Überblick ohne Formeln 2

3 Ein selbsterregtes Rückkopplungssystem 4
3.1 Elektrische Analogiemodelle und „Verständnis“ . . . 4
3.2 Zwei Zungen als Parallelschaltung . . . 4
3.3 Heutige Sichtweise . . . 4

4 Johnstons Ergebnisse 5
4.1 Johnstons Beispiel . . . 5
4.2 Anmerkungen . . . 5

5 Johnstons Modell für Kanal #4 einer C-Harp 6
5.1 Messwerte und Kurven . . . 6
5.2 Johnstons Phasenbedingung . . . 7
5.2.1 Resonator mit zwei Moden . . . 7
5.2.2 Rohr als Resonator . . . 8
5.2.3 Realistische Phasenverschiebungen . . . 9

6 Die Formeln von Johnston 9
6.1 Fallunterscheidung . . . 9
6.2 Bezeichnungsweisen bei Fletcher . . . 10
6.3 Johnston adaptiert Fletchers Formeln für Einzelzungen . . . 10
6.4 Die Doppelrolle des Vokaltrakts . . . 10
6.5 Von Johnston verwendete Bezeichnungen und Werte . . . 10
6.6 Bezeichnungsweisen . . . 11
6.7 Johnstons Formeln für einzelne Zungen . . . 11
6.7.1 Hilfsgrößen . . . 12
6.7.2 Konvention für Betrag und Phase . . . 12
6.7.3 Admittanz der Einzelzunge . . . 12
6.8 Zwei Zungen in Parallelschaltung . . . 13
6.9 Wann klingt das Instrument? . . . 13

7 Blasen und Ziehen 14
7.1 Synchroner Vorzeichentausch . . . 14
7.2 Herleitung für Blas- und Ziehtöne . . . 14
7.2.1 Vorzeichen des Anblasdrucks . . . 14
7.2.2 Blastöne . . . 14
7.2.3 Ziehtöne . . . 14
7.2.4 Ergebnis . . . 15

8 Eine realistischere Interpretation 16

Anhang: Schwingende Zunge und äquivalenter 1-Punkt-Oszillator 17